

## **Estymacja stanu z nieciągłymi pomiarami dla modelu matematycznego opisanego równaniami różniczkowymi typu hiperbolicznego**

### **1. Model matematyczny opisany równaniami różniczkowymi typu hiperbolicznego**

Rozpatrując dynamikę przepływu wody, można uzyskać rozkład przestrzenno-czasowy wskaźników zanieczyszczonej wody. Wskaźniki te reprezentują odpowiednio biochemiczne zapotrzebowanie tlenu (BZT) i rozpuszczony tlen (RT). Dla rzeki jakość wody wyrażona tymi wskaźnikami jako wektor stanu zależy od czasu i jej długości. Na podstawie bilansu masowego uzyskuje się model matematyczny w postaci równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego pierwszego rzędu. Po dokonaniu umownego podziału rzeki na odcinki, np. między dopływami opis dla  $i$ -tego odcinka rzeki przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}x_i + \frac{d}{dz}(Vx_i) = Ax_i + Bw \quad (1)$$

z warunkiem początkowym: w chwili czasowej  $t$

$$x_i(z, t_0) = x_{i0}(z) \quad (2)$$

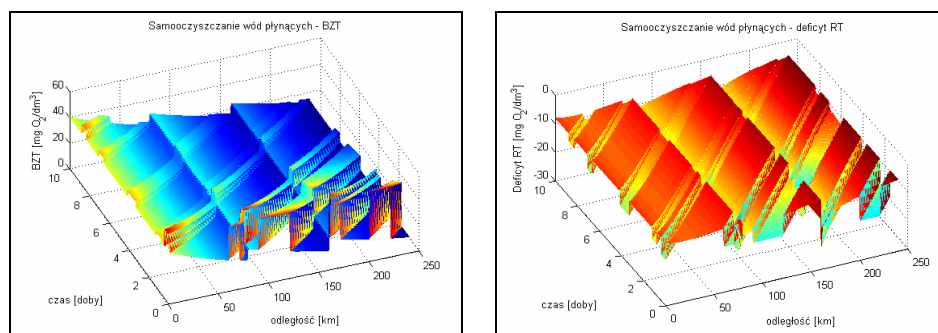
oraz warunkiem brzegowym:

$$x_i(0, t) = M_i x_{i-1}(1, t) + w_{bi}(t) + R_{bi} u_{bi}(t) \quad (3)$$

Macierz  $M_i$  stanowi powiązania brzegowe między sąsiednimi odcinkami, a wektor  $w_{bi}$  jest zakłóceniem brzegowym. Sterowanie  $u_{bi}$  w postaci dostarczenia tlenu zmienia tylko współrzędną wektora stanu  $x_2$  (RT) i zlokalizowane jest na początku odcinka rzeki. Wartości diagonalnej macierzy prędkości przepływu wody  $V$  mogą zmieniać swoje wartości wzdłuż długości. Macierz  $A$  określa dynamikę zmian współrzędnych wektora stanu, tj. BZT i RT. Macierz  $B$  określa udział sygnałów zakłócających  $w$  w procesie samooczyszczania [Szymkiewicz 2000].

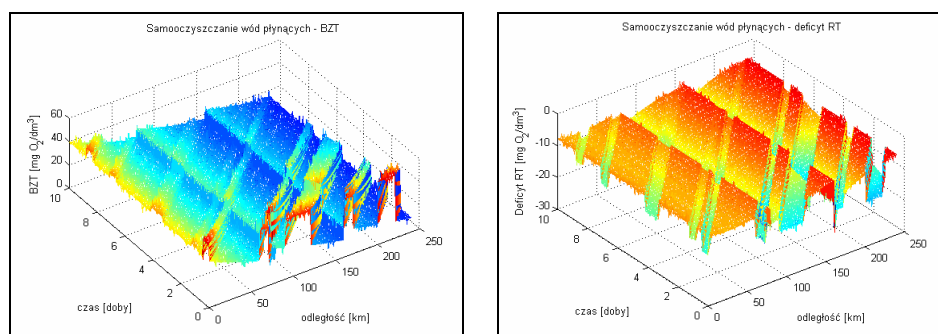
Rozwiązaniem równania (1) z warunkami (2) i (3) jest hiperpowierzchnia, której kształt zależy od wymuszeń. Rys. 1 przedstawia przykład hipotetycznej rzeki z dopływami bocznymi o różnych wartościach początkowych wskaźników

BZT i RT oraz zmiennych w czasie i na długości warunków granicznych [Szymkiewicz, Gąsiorowski 2010: 307].



**Rys. 1. Rozkład BZT i RT dla różnych warunków początkowych z dopływami bocznymi**

W rzeczywistości nie występują idealne warunki, dlatego należy uwzględnić wpływ losowych wymuszeń. Aby wykres posiadał bardziej realne wyniki, uwzględniono takie zaszumienie wskaźników sygnałem stochastycznym o rozkładzie gaussowskim. Rys. 2 przedstawia zmiany spowodowane tymi wymuszeniami działającymi na całej długości rzeki.



**Rys. 2. Rozkład BZT i RT uwzględniający zakłócenia o rozkładzie gaussowskim**

## 2. Pomiary ciągłe

Praktyczną realizację ciągłych w czasie pomiarów można przeprowadzać w ustalonych punktach wzdłuż rzeki. Dla takiego układu interpretacja swobodnie płynącej łódki powoduje, iż pomiary stają się dyskretny w czasie. Jest to idea rozważań równań różniczkowych cząstkowych wzdłuż „charakterystyk”. Pomiar ciągły generuje równanie:

$$y(t) = x_2(t) + v_p(t) \quad (4)$$

w którym  $x_2(t)$  – to rozpuszczony tlen RT,  $v_p(t)$  – jest zakłóceniem pomiarowym o rozkładzie gaussowskim, o zerowych wartościach średnich. Za pomocą podstawienia  $t = t_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  uzyskuje się równania dyskretne, których postać wektorowa jest następująca:

$$y(t_k) = Cx(t_k) + v_p(t_k) \quad (5)$$

gdzie macierz  $C = [0, 1]$ , a wektor stanu  $x(t_k) = \text{col}[x_1(t_k), x_2(t_k)]$  i zakłócenie pomiarowe  $v_p(t_k)$  określone są w dyskretnym momencie  $t_k$ .

Opis modelu o parametrach rozłożonych stosując podejście wzdłuż „charakterystyk” dla ww. rozważań, da się opisać równaniami różniczkowymi zwyczajnymi przyjmującymi postać:

$$\frac{d}{dt}x(z_i(t), t) = A(z_i(t))x(z_i(t), t) + Bw_r(z_i(t), t) \quad (6)$$

gdzie warunek początkowy:

$$x(z_i(t_0), t_0) = x_0(z_{i0}), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

oraz  $B$  – macierz oddziaływań zakłóceń;  $w_r$  – sygnał szumu zakłócającego [Kwater, Krutys, Bartman, Pękała, *Simulation...*].

### 3. Idea estymacji metodą Kalmana-Bucy

Zagadnienie estymacji dla układu opisanego równaniami (6) polega na znalezieniu estymaty  $\hat{x}(t)$  aktualnego stanu, dla którego spełniony jest warunek minimalizujący odległość między wektorem  $x(t)$  a jego estymatą  $\hat{x}(t)$ . Rozwiązaniem tak postawionego problemu jest estymata  $\hat{x}(t)$  spełniająca poniższe równanie:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (7)$$

w którym współczynniki  $K$  dane są wzorami:

$$K = PCV_p^{-1}, \quad (8)$$

podczas gdy macierze  $P$  stanowią rozwiązania równań Riccatiego:

$$\frac{d}{dt}P = AP + PA^T - PC^T V_p^{-1} CP + DW_r D^T, \quad P(t_0) = P_0, \quad (9)$$

W równaniu (9)  $P, W_r, V_p$  to macierze kowariancji odpowiednio błędu estymacji, zakłóceń obiektowych i zakłóceń pomiarowych. Zależności (7–9) reprezentują równanie filtru Kalmana-Bucy, które aby rozwiązać, należy zachować odpowiednią kolejność.

#### 4. Estymacja wskaźników jakości wody w procesie filtracji i predykcji

W procesie estymacji stanu dla obiektów ciągłych z dyskretnymi pomiarami można wyróżnić dwie fazy: filtrację i predykcję. Przez filtrację rozumiane są operacje generowania estymat w chwili  $t_k$  na podstawie wyników pomiarów wykonanych w tym momencie i poprzednio. Natomiast w predykcji chodzi o uzyskanie estymaty na przyszłość do chwili pomiaru. Równania predykcji i filtracji otrzymuje się wprost z pierwszego równania filtru (7), uwzględniając nieciągłość pomiaru poprzez przyjęcie  $V_p(t \neq t_k) = \infty$ .

**Filtracja** – obowiązuje dla momentów dokonywania pomiarów  $t_k$ ,

$$\hat{x}(t_k/t_k) = \hat{x}(t_k/t_{k-1}) + K_F(t_k)[y(t_k) - C\hat{x}(t_k/t_k)] \quad \hat{x}(t_0/t_{-1}) = \bar{x}_0 \quad (11)$$

gdzie  $\hat{x}(t_k/t_k)$  – estymata w chwili  $t_k$  otrzymana na podstawie pomiarów  $y(t_0), \dots, y(t_k)$ ,  $P(t_k/t_k)$  – kowariancja błędu estymacji,  $K_F(t_k)$  – współczynnik wzmocnienia filtru.

**Predykcja** – obowiązuje dla  $t_{k+1} > t_k$ ,

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t_k/t_k) = A\hat{x}(t_k/t_k), \quad \hat{x}(t_k/t_k) \quad (12)$$

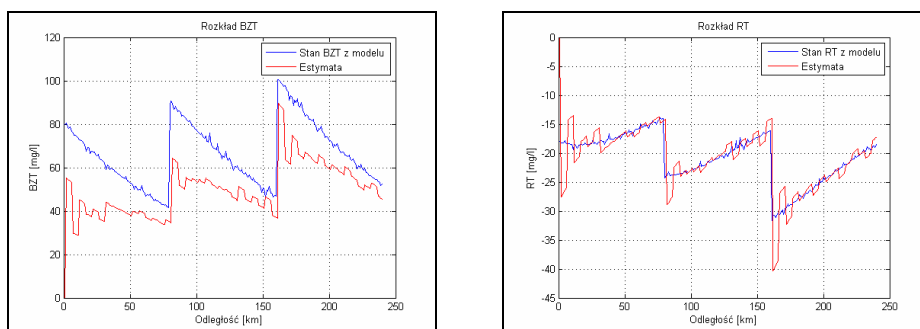
gdzie  $\hat{x}(t_k/t_k)$ ,  $P(t/t_k)$  – odpowiednio estymata i kowariancja błędu estymacji prognozowana dla  $t > t_k$ ,  $W_r$  – kowariancja zakłóceń  $w_r$ .

Osobliwością estymat jest nieciągłość w chwilach otrzymywania pomiarów. Spowodowane jest to dostarczaniem najnowszych informacji o obiekcie w postaci pomiarów  $y(t_k)$ . Wartość estymaty  $\hat{x}(t/t_k)$  jest „poprawiana” nowym pomiarem ze wzmocnieniem  $K_F(t_k)$  w stosunku do wartości estymaty otrzymanej z poprzednich obliczeń. Wielkość tej „poprawki” zależy od różnicy między aktualnym pomiarem a dotychczas określoną wartością estymaty (z przed momentu pomiaru) [Krutys 2012].

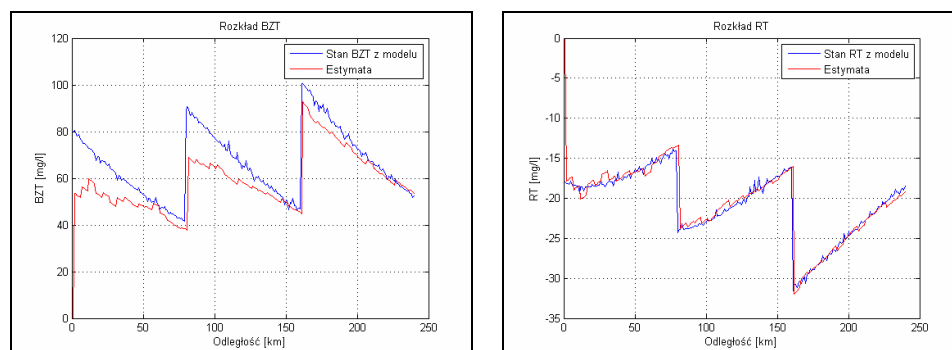
#### 5. Rezultaty eksperymentów symulacyjnych

Badania symulacyjne przeprowadzono w środowisku Matlab. Rys. 3 przedstawia rezultaty badań dla hipotetycznej rzeki z trzema bocznymi dopływami o dużych wartościach zanieczyszczeń. Jak łatwo zauważyć, dokładność estymacji dla mierzonej współrzędnej stanu (RT) jest lepsza [Palczewski 2004].

Porównując rysunki (rys. 3–4), obserwujemy znaczny wpływ wartości współczynników wzmocnienia  $K$  w równaniu (11). Analizując wyniki symulacji, okazuje się, iż wartość estymaty RT jest bliższa rzeczywistemu modelowi niż wartość estymaty BZT. Wynika to z faktu, iż wartość RT otrzymujemy z bezpośrednich pomiarów, a wartości BZT z szacowania w procesie estymacji. Różnica pomiędzy wartościami uzyskanymi z modelu a wartościami estymowanymi może być bazą do wyliczenia błędu przybliżenia estymacji.



Rys. 3. Stan i estymata BZT i RT dla współczynników:  $K_{F1}=-2.5$ ,  $K_{F2}=0.5$



Rys. 4. Stan i estymata BZT i RT dla współczynników:  $K_{F1}=-3$ ,  $K_{F2}=0.9$

## Podsumowanie

W artykule przedstawiono model matematyczny rzeki opisany równaniem różniczkowym cząstkowym typu hiperbolicznego, a uwzględniając jej naturę można zapisać ten model w postaci zbioru równań różniczkowych zwyczajnych, nie tracąc dokładności rozważań. Dokonano rozwiązania zagadnienia estymacji stanu z wykorzystaniem idei filtru Kalmana-Bucy z wykorzystaniem nieciągłych pomiarów tylko jednej współrzędnej wektora stanu. Nieciągłość pomiarów spowodowała proces estymacji dwóch etapów, tj. filtracji i predykcji. Zatem konieczne stało się rozwiązywanie na przemian równań dyskretnych i ciągłych. Rozważano także problematykę zmiany wartości współczynnika wzmocnienia filtru, uzyskując zróżnicowaną jakość estymacji stanu.

## Literatura

- Krutys P. (2012), *Badania symulacyjne adaptacyjnego mechanizmu doboru współczynnika wzmocnienia filtru Kalmana*, Praca inżynierska, Rzeszów.
- Kwater T., Krutys P., Bartman J., Pękala R., *Simulation of diffusion experiments in environment water polluted*, 8-th AIMS International Conference.

- Palczewski A. (2004), *Równania różniczkowe zwyczajne, teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*, Warszawa
- Szymkiewicz R. (2000), *Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach i kanałach*, Warszawa.
- Szymkiewicz R., Gąsiorowski D. (2010), *Podstawy hydrologii dynamicznej*, Warszawa on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Dresden University of Technology, Department of Mathematics, p. 307.

### **Streszczenie**

W artykule przedstawiono model matematyczny zanieczyszczonej rzeki opisaną równaniami różniczkowymi typu hiperbolicznego oraz rozważania estymacji za pomocą filtra Kalmana-Bucy z dyskretnymi pomiarami. W rezultacie otrzymano dwa etapy badań, tj. filtrację i predykcję. W procesie estymacji wykorzystano pomiary jakości rzeki w stałych jej punktach, otrzymując wartości dyskretne, co następnie było kluczowe dla zagadnienia predykcji rozumianej jako równania w postaci ciągłej z warunkami początkowymi uzyskanymi w procesie filtracji generujące wartości przewidywane do następnych pomiarów. W badaniach uwzględniono dobór odpowiednich współczynników wzmocnienia filtru mającego istotne znaczenie na wartości błędu estymacji.

**Słowa kluczowe:** modelowanie matematyczne, równania różniczkowe cząstkowe, estymacja, eksperymenty symulacyjne.

### **State estimation of discrete measurements for the mathematical model described by differential equations hyperbolic type**

#### **Abstract**

This paper presents a mathematical model of a polluted river described differential equations of hyperbolic type, and consider estimation using the filter Kalman-Bucy with discrete measurements. As a result, it received two steps of estimation i.e. filtration and prediction. In the estimation process of river quality was used measurements of the fixed point, yielding discrete values, which then was crucial to issue a prediction understood as a continuous equation with the initial conditions obtained by a filtration process to generate the predicted values of subsequent measurements. The study included the selection of appropriate filter gain factors having a major influence on the estimation error.

**Key words:** mathematical modeling, partial differential equations, estimation, simulation experiments.