

**Tadeusz KWATER, Bogusław TWARÓG, Robert PEKALA,  
Karol BARTNIK**

Uniwersytet Rzeszowski, Polska

## **Modelowanie komputerowe układów prostowniczych jedno- i trójfazowych z obciążeniem RL**

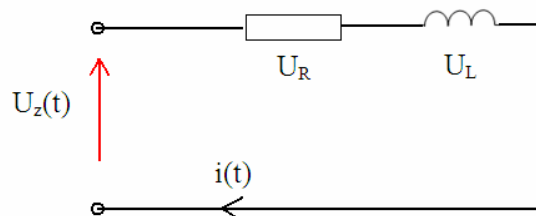
### **Wstęp**

Obecny stan rozwoju cywilizacji wymusza konieczność używania urządzeń codziennego użytku zasilanych energią elektryczną. Wśród tych urządzeń dominującą grupę stanowią urządzenia, których wymogi zasilania oparte są na wyprostowanym sygnale prądowym. Badania czynne na urządzeniach elektrycznych są kosztowne i niebezpieczne, stąd też komputerowe modelowanie układów elektrycznych i późniejsze bezinwazyjne badania są bardzo użyteczne.

### **1. Model matematyczny układu prostowniczego jednofazowego**

#### **A. Układ elektryczny z obciążeniem RL**

Układy elektryczne z obciążeniem RL są bardzo często spotykane w praktyce. Dokładność ich opisu wymaga stosowania równań różniczkowych. Uzyskanie przebiegów czasowych sygnałów dla takiego układu jest rezultatem rozwiązania tychże równań. Do sformułowania modelu matematycznego przyjmuje się znane prawa z elektrotechniki (prawo Ohma, prawa Kirchhoffa) [Krakowski 1995].



**Rys. 1. Schemat układu z obciążeniem RL**

Dla układu z rys. 1 II prawo Kirchhoffa przyjmuje następującą zależność:

$$u_z(t) = u_R(t) + u_L(t), \quad (1)$$

gdzie:  $u_z(t)$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$  to odpowiednio: napięcie zasilania, spadek napięcia na rezystorze, spadek napięcia na cewce.

Spadki napięć na elementach w obwodzie:

$$u_R(t) = i(t)R, \quad (2)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (3)$$

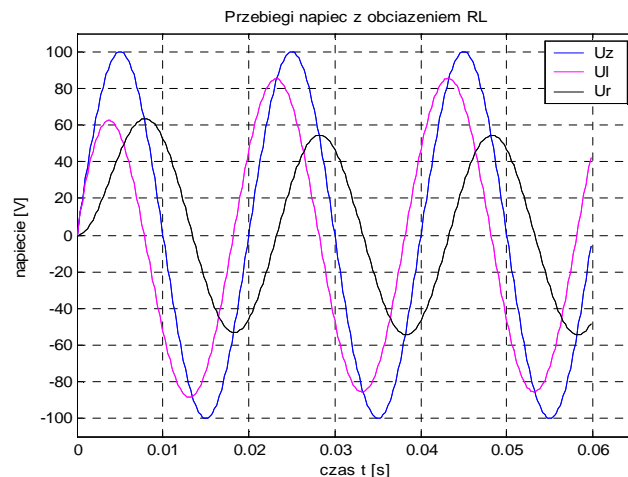
gdzie:  $i(t)$  – sygnał natężenia prądu,  $R$  – wartość rezystancji,  $L$  – wartość indukcyjności,  $di(t)$  – różniczka prądu.

W wyniku przekształceń otrzymuje się równanie różniczkowe:

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot i(t) + \frac{u_Z(t)}{L}, \quad (4)$$

w którym:  $\tau = L/R$  to stała czasowa.

W takim ujęciu elementy wchodzące w skład rozważanego obwodu opisane są funkcjami, które zawierają dynamikę zmian sygnałów. Rozwiązanie równania można dokonać w sposób analityczny lub metodami przybliżonymi. Do tych metod numerycznych należy m.in. metoda Eulera, metoda Rungego Kuty i inne. Przykład rezultatu rozwiązania równania 1.4 metodą Eulera pokazano na rys. 2. Rozwiązanie równania różniczkowego uwzględnia przebiegi przejściowe i stany ustalone, w rezultacie otrzymujemy przebiegi sygnałów przy wymuszeniu sinusoidalnym odpowiednio przesunięte w fazie. W przypadku rozważań w stanie ustalonym należy stosować podejście z liczbami zespolonymi.



**Rys. 2. Sygnały napięć w obwodzie dla danych:  $U_m = 100$ ,  $R = 10$ ,  $L = .05$ ,  $f = 50$**

Dalsze rozważania obejmujące m.in. układy prostownicze będą zawierały wyżej zaproponowane podejście w ujęciu z zapisem równań różniczkowych.

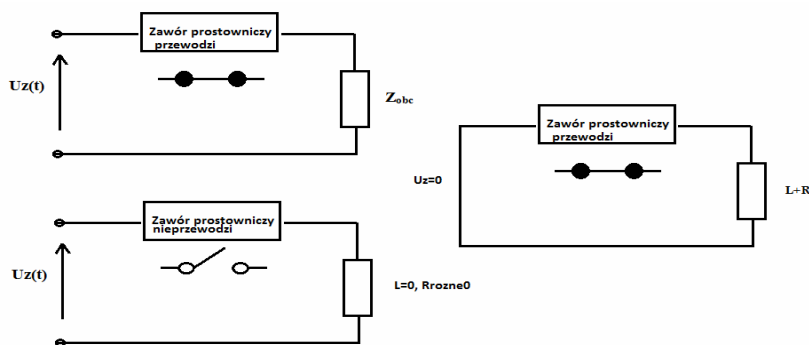
## B. Układ prostowniczy jednofazowy jednopołówkowy

Opracowanie modelu matematycznego układu prostownika z obciążeniem RL będzie wykonane analogicznie jak poprzednio, lecz pojawi się element prostowniczy (zawór) reprezentowany jako zmienna logiczna. Powoduje ona konieczność rozważania różnych zastępczych struktur obwodów [Tejchman, Twaróg 2005: 181–184; Buczek, Krutys, Kwater, Twaróg 2011: 38–41].

Przyjęte założenia do rozważań:

- 1) element prostowniczy (zawór) opisuje się zmienną logiczną o dwóch stanach (zwarły lub rozwarły),
- 2) zawór nie wprowadza żadnego obciążenia,
- 3) zmiana stanu pracy zaworu następuje po spełnieniu odpowiednich warunków, tj.:
  - dodatnie napięcia anodowe,
  - wartość prądu mniejsza od prądu wyłączenia,
  - czas trwania wyłączenia jest większy od czasu wyłączenia zaworu,
  - wystąpi sygnał sterujący tyrystora  $\alpha$ ,
- 4) obecność indukcyjności w obwodzie powoduje wystąpienie zjawiska komutacji prostej i złożonej,
- 5) indukcyjność źródła zasilania traktuje się wspólnie z indukcyjnością obciążenia.

Uwzględniając powyższe, rozważa się następujące konfiguracje obwodów elektrycznych w różnych przedziałach czasowych.

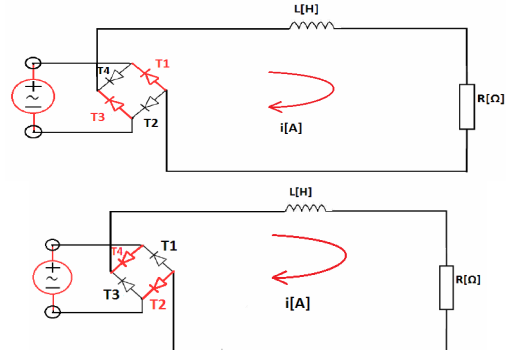


Rys. 3. Schematy połączeń elektrycznych dla różnych stanów przewodzenia zaworu prostowniczego

Rys. 3 przedstawia konfigurację obwodów elektrycznych wynikające z warunków pracy. Warunki końcowe sygnałów w kolejnych schematach są warunkami początkowymi dla następnych. Taka sytuacja nastąpi np. dla przypadku A i B, gdy w obwodzie występuje indukcyjność, a przypadek A i C wystąpi, gdy niespełniony będzie warunek 3a, a ponadto w obciążeniu jest brak indukcyjności.

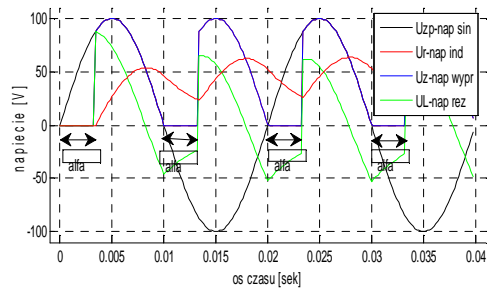
### C. Układ prostowniczy jednofazowy dwupołówkowy

W układzie dwupołówkowym występuje zespół elementów prostowniczych w postaci mostka Graetza [Krystkowiak 2010]. Przypadki przewodzenia przy spełnieniu założeń podanych w punktach od 1 do 5 dla poszczególnych zaworów przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Schematy przypadków przewodzenia zaworów w układzie jednofazowym i prostowaniu dwupołówkowym

W skład modelu matematycznego będą wchodziły schematy prezentowane na rys. 3 zgodnie z odpowiednimi założeniami (od 1 do 5). Zatem model matematyczny dla tego rodzaju prostowania będzie sprowadzał się do równań różniczkowych obowiązujących dla odpowiednich schematów połączeń elektrycznych z rys. 3. Przykładowe rezultaty badań symulacyjnych dla takiego układu prostowniczego podano na rys. 5.

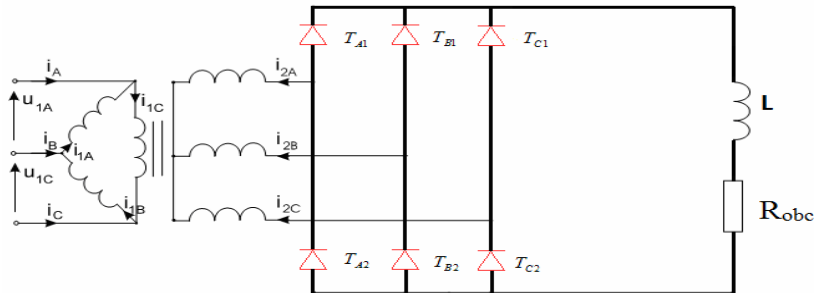


Rys. 5. Sygnały napięć dla układu prostowniczego dwupołówkowego dla danych:  $U_m = 100[V]$ ,  $R = 20[\Omega]$ ,  $L = 0.1[H]$ ,  $f = 50[Hz]$

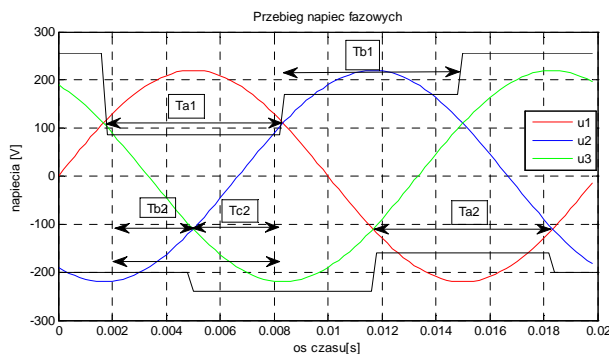
Otrzymane przebiegi sygnałów są zgodne z oczekiwaniem, tj. łatwo zauważyć działanie dwupołówkowego prostowania oraz działanie kąta zapłonu  $\alpha$ .

## 2. Układ prostowniczy trójfazowy

Schemat połączeń elektrycznych dla tego przypadku przedstawia rys. 6. Działanie układu z rys. 6 sprowadza się do wyboru odpowiednich schematów połączeń elektrycznych podanych na rys. 3. Należy jednak uwzględnić specyfikę przebiegu napięć trójfazowych. Zawór z górnego układu ( $T_{A1}$ ,  $T_{B1}$ ,  $T_{C1}$ ) będzie w stanie przewodzenia wspólnie z dwoma zaworami dolnymi, np. ( $T_{A1}$  oraz  $T_{B2}$ , a potem  $T_{C3}$ ). Taki przypadek występuje tylko dla obciążenia czysto rezystancyjnego.



Rys. 6. Schemat układu prostowniczego trójfazowego

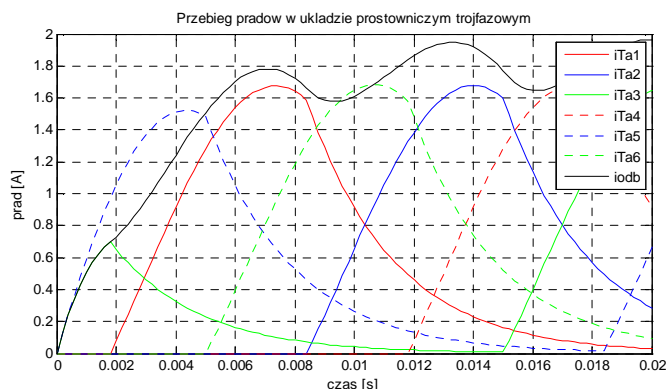


Rys. 7. Przebiegi napięć fazowych z diagramem przewodzenia zaworów

Zatem model matematyczny trójfazowego układu prostowniczego będzie składał się z zespołu równania różniczkowego (4), w którym może nie wystąpić napięcie zasilania  $u_z(t)$  dla obciążenia indukcyjno-rezystancyjnego. Całkowity model dla trójfazowego będzie więc wymagał rozwiązań równań sekwencyjnie dla sześciu schematów, tj.  $T_{A1}$ - $T_{B2}$ ,  $T_{A1}$ - $T_{C2}$ ,  $T_{A2}$ - $T_{C2}$ ,  $T_{A2}$ - $T_{A2}$ ,  $T_{C1}$ - $T_{A2}$ ,  $T_{C1}$ - $T_{B2}$ .

Na rys. 8 liniami ciągłymi oznaczono przebiegi prądów dla górnego układu zaworów, liniami kreskowanymi odpowiednio sygnały prądów dla dolnego układu zaworów. Prąd odbiornika stanowiący sumę składowych oznaczono ko-

lorem czarnym. Eksperymenty symulacyjne dla tego przypadku wykonano dla zerowego kąta zapłonu tyrystorów.



**Rys. 8. Przebiegi sygnałów prądowych zaworów prostowniczych ( $R=100[\Omega]$ ,  $L = 0.3[H]$ ,  $f = 50[Hz]$ ,  $U_f = 220[V]$ )**

### Podsumowanie

W artykule przedstawiono zagadnienia modelowania komputerowego dla układów prostowniczych z obciążeniem RL. Uzyskano opis w postaci zwyczajnych równań różniczkowych. Ponadto dla układów prostowniczych zaproponowano, iż element prostowniczy (zawór) będzie reprezentowany jako zmienna logiczna, powodując zmianę konfiguracyjną schematów elektrycznych. Rozważano układy prostownicze jednofazowe jednopółkwe z zaworem niesterowalnym (dioda), sterowanym (tyrystor) oraz dwupółkwe z zaworami sterowanymi, a także układ prostowniczy trójfazowy. Proponowane podejście w tym przypadku sprowadza się do rozważania sześciu schematów połączeń elektrycznych sekwencyjnie przełączanych między sobą. Otrzymane rezultaty są zgodne z oczekiwanymi.

### Literatura

- Buczek K., Krutys P., Kwater T., Twaróg B. (2011), *Neuronowy system diagnostyczny dla układów prostowniczych*, „Przegląd Elektrotechniczny”, nr 8.
- Krakowski M. (1995), *Elektrotechnika teoretyczna*, Warszawa.
- Krystkowiak M. (2010), *Realizacja modelu symulacyjnego układu prostownikowego z modulacją prądów w obwodzie wyjściowym*, „Przegląd Elektrotechniczny”, nr 12, 230.
- Tejchman M., Twaróg B. (2005), *Model matematyczny 3-fazowego prostownika sterowanego z obciążeniem RL*, 10-th International Modelling School of AMSE-UAPL.

### **Streszczenie**

W artykule przedstawiono problematykę dotyczącą modelowania komputerowego układów prostowniczych jedno- i trójfazowych z obciążeniem typu RL. Podano założenia upraszczające oraz schematy połączeń elektrycznych i odpowiadające im równania różniczkowe zwyczajne. Zamieszczono rezultaty eksperymentów numerycznych potwierdzających ich zgodność z przebiegami rzeczywistymi.

**Słowa kluczowe:** modelowanie komputerowe, równania różniczkowe zwyczajne, schematy połączeń obwodów elektrycznych, dioda, tyrystor, przebiegi symulacyjne.

### **Computational modelling one and three-phase rectifier with RL load**

#### **Abstract**

This paper presents issues concerning computational modelling systems one and three-phase rectifier with a load RL. Given the simplifying assumptions and the wiring diagrams and the corresponding ordinary differential equations. Contains the results of numerical experiments confirming their compliance with the actual waveforms

**Key words:** computational modelling, ordinary differential equations, scheme electrical circuits, diode, thyristor, simulation waveforms.